Raíces y álgebra de Lie semisimples diagramas de Dynkin

Aldo Arroyo Montero*

RESUMEN

En el presente trabajo desarrollamos la teoría a las álgebras de Lie. Empezamos dando el concepto de álgebra de Lie, luego nos centramos en el análisis de las denominadas álgebras de Lie semisimples, dentro de este contexto definimos el concepto de raíz simple. Al final mostramos dos ejemplos de álgebras de Lie semisimples, el álgebra su(2) y el álgebra su(3), las cuales son muy usadas en la Física, por ejemplo el álgebra su(2) viene a ser el álgebra del operador del momento angular.

ABSTRACT

We study here the theory of Lie algebras. We start giving the concept of the Lie algebras, then we analize the semisimple Lie algebras, the we also define the concept of simple root. At the end we show two examples of semisimple Lie algebras, the algebra su(2) and the algebra su(3). Those algebras are very used in physics,for example the algebra su(2) is the algebra of the angular momentum operator.

* *Grupo de Física Teórica, Fac. de Ciencias, UNI.*
J19970390@uni.edu.pe

Introducción

El primer ejemplo comúnmente usado en el estudio de las álgebras de Lie viene a ser el álgebra su(2), la base usual para esta álgebra viene a ser el conjunto de vectores $\{S_1,S_2,S_3\}$ donde las relaciones de conmutación vienen dadas por

$$[S_i, S_j] = \sum_{k=1}^{3} i\varepsilon_{ijk} S_k$$

También existe otra base de vectores para esta álgebra $\{S\pm, S_3\}$, denominada base esférica [1] o cíclica. La relación que existe entre ambas bases viene dada por

$$S_3 = S_3$$

$$S_{\pm} = \frac{S_1 \pm iS_2}{2}$$

Ahora, usando las relaciones de conmutación entre los elementos de la base $\{S_1,S_2,S_3\}$, obtenemos las relaciones de conmutación entre los elementos de la base esférica

$$[S_+, S_-] = \left[\frac{S_1 + iS_2}{2}, \frac{S_1 - iS_2}{2}\right] = \frac{S_3}{2}$$

$$[S_+, S_-] = \frac{S_3}{2}$$

$$[S_3, S_{\pm}] = \left[S_3, \frac{S_1 \pm iS_2}{2}\right] = \pm\frac{S_1 \pm iS_2}{2}$$

$$[S_3, S_{\pm}] = \pm S_{\pm}$$

¿Otras álgebras poseerán similar estructura?, es decir, si para otras álgebras existirá una base constituida por dos tipos de vectores similares a los vectores $S\pm$ y S_3. Veremos que para las álgebras de Lie denominadas semisimples existe dicha base (denominada base de Cartan-Weyl), para dar a conocer este notable resultado primeramente daremos el concepto de raíz y posteriormente hablaremos de raíces simples las cuales se muestran gráficamente en los denominados diagramas de Dynkin.

Álgebra de Lie

Un álgebra de Lie L={V,[.,.]} es un espacio vectorial V (real o complejo) sobre el cual se define la operación binaria cerrada [.,.] llamada conmutador (es decir, a todo par $x,y \in V$, le corresponde un elemento $z \in V$ tal que $z=[x,y]$). Dicha operación debe satisfacer condiciones de linealidad, antisimetría y la identidad de Jacobi

1) $[\alpha x+\beta y,z]=\alpha[x,z]+\beta[y,z]$
2) $[x,y]=-[y,x]$
3) $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$

donde $x, y, z \in V$ y α, β son números reales o complejos dependiendo del caso. Debe recalcarse que la operación de conmutación para un álgebra de Lie arbitraria es una operación abstracta y no necesariamente es igual al conmutador del caso de los operadores. La dimensión del álgebra de Lie viene a ser la dimensión del espacio vectorial.

Por ejemplo, el espacio vectorial euclidiano $L=R^3$, con la operación $[\vec{x},\vec{y}]$ definida como $[\vec{x},\vec{y}]\equiv\vec{x}\times\vec{y}$, es un álgebra de Lie de dimensión 3.

Un álgebra de Lie se llama abeliano o conmutativo si $[x,y]=0$ para cualquier x, $y \in L$. Sean M, N dos subconjuntos de vectores del álgebra de Lie L, denotemos por [M,N] todos los vectores de la forma: $[x,y]$, $x \in M$, $y \in N$.

El subespacio N del álgebra de Lie L se llama subalgebra si $[N,N] \subset N$ e ideal si $[L,N] \subset N$. Esta claro que el ideal automáticamente es un subalgebra. El {0} y toda el álgebra L son ideales de L, llamados ideales triviales.

Un subalgeba N que es abeliano e ideal se llama ideal abeliano.

Un álgebra de Lie se llama simple, si no posee ningun ideal a parte de los ideales triviales, y semisimple, si no posee ningun ideal abeliano.

Sea $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ una base del espacio vectorial L de dimensión n, por la linealidad del conmutador $z=[x,y]$ y expresando los vectores x, y, z en la base B tenemos

$$z = [x,y]$$

$$\sum_{k=1}^{n} z^k e_k = [\sum_{i=1}^{n} x^i e_i , \sum_{j=1}^{n} y^j e_j]$$

$$\sum_{k=1}^{n} z^k e_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x^i y^j [e_i , e_j]$$

$$\sum_{k=1}^{n} z^k e_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x^i y^j C_{ij}^k e_k .$$

A partir de esta última ecuación deducimos que las componentes del vector z vienen dadas por

$$z^k = [x, y]^k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^k x^i y^j$$

donde

$$[e_i , e_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k e_k .$$

Los números C_{ij}^k se llaman constantes de estructura del álgebra de Lie L. Nótese que los valores de dichas constantes, dependen de la elección de la base. De los axiomas 2) y 3) se deduce

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k$$

$$\sum_{p=1}^{n} \left(C_{ij}^p C_{kp}^m + C_{jk}^p C_{ip}^m + C_{ki}^p C_{jp}^m \right) = 0$$

Criterio de semisimplicidad de Cartan

En base a las constantes de estructura de un álgebra de Lie, definamos la siguiente cantidad simétrica (tensor métrico).

$$g_{ij} = g_{ji} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=}^{n} C_{ik}^{m} C_{jm}^{k}.$$

Un álgebra de Lie es semisimple si y solo si

$$\det(g_{ij}) \neq 0.$$

Este criterio nos permite determinar de manera práctica cuando un álgebra de Lie es semisimple o no.

A continuación mostraremos, usando el criterio de Cartan que el álgebra su(2) es semisimple.

Semisimplicidad del álgebra su(2)

Las constantes de estructura del álgebra su(2) viene a ser el tensor antisimétrico $i\varepsilon_{ijk}$. Por lo que para este caso el tensor métrico viene dado por

$$g_{ij} = \sum_{k,m=1}^{3} -\varepsilon_{imk}\varepsilon_{jkm} = \sum_{k,m=1}^{3} \varepsilon_{imk}\varepsilon_{jkm} = 2\delta_{ij}$$

entonces

$$\det(g_{ij}) = 8 \neq 0$$

por lo tanto queda mostrado que el álgebra su(2) es semisimple.

Raíces y álgebras de Lie semisimples

Sea L un álgebra de Lie semisimple de dimensión n; Cartan demostró que existe un conjunto $\{H_i\}$ constituido por l vectores $H_i \in L$ $\{i=1,2,...,l\}$ linealmente independientes tal que

$$[H_i, H_j] = 0. \tag{1}$$

El número entero l se denomina rango del álgebra, el rango del álgebra nos indica la máxima cantidad de vectores H_i que conmutan entre si. El conjunto $\{H_i\} \subset L$ es un subálgebra de L denominada subálgebra de Cartan.

También puede deducirse que existe un conjunto $\{E_\alpha\}$ constituido por n-l vectores $E_\alpha \in L$ linealmente independientes tal que

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \quad (\alpha_i \in R) \tag{2}$$

Al vector l dimensional $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l) \neq \bar{0}$ se le denomina vector raíz no nulo o simplemente rapiz no nula, existen n-l raíces no nulas distintas, llamaremos V_R al conjunto constituido por estas n-l raíces no nulas.

Los l vectores H_i y los n-l vectores E_α, constituyen una base del álgebra L, dicha base se denomina base de Cartan-Weyl.

Por ejemplo la base de Cartan-Weyl del álgebra **su(2)** viene a ser el conjunto de vectores $\{S_3, S_\pm\}$, la subálgebra de Cartan para este caso vendría a ser el conjunto $\{S_3\}$. Denotemos la base de Cartan-Weyl como $\{F_A\}$ $(A=1,2,...,l,\alpha,\beta,\gamma,...)$ donde $\alpha,\beta,\gamma,... \in \mathbf{V_R}$,

$$F_i \equiv H_i \qquad (i=1,2,...,l) \tag{3}$$

$$F_\alpha \equiv E_\alpha \qquad (\alpha \in \mathbf{V_R}). \tag{4}$$

Las constantes de estructuras del álgebra C_{AB}^T vienen dadas a partir de las relaciones de conmutación entre los elementos de la base

$$[F_A, F_B] = \sum_T C_{AB}^T F_T. \tag{5}$$

Los índices con letras latinas mayúsculas tomarán valores 1,2,...,l,α,β,γ,...; los índices con letras latinas minúsculas tomarán valores de 1,2,...,l; las letras griegas se emplearán para denotar a cualquiera de las n-l raíces no nulas.

Usando (1), (2), (3), (4), y (5) obtenemos

$$C_{ij}^T = 0 \tag{6}$$

$$C_{i\alpha}^{j} = 0 \tag{7}$$

$$C_{i\alpha}^{\beta} = \alpha_i \delta_{\alpha}^{\beta}. \tag{8}$$

A partir de la identidad de Jacobi,

$$[H_i, [E_\alpha, E_\beta]] + [E_\alpha, [E_\beta, H_i]] + [E_\beta, [H_i, E_\alpha]] = 0$$

obtenemos que si α y $\beta \in V_R$,

$$[H_i, [E_\alpha, E_\beta]] = (\alpha_i + \beta_i)[E_\alpha, E_\beta]$$

De esta última relación se demuestra que [2]

$$[E_\alpha, E_\beta] = \sum_{i=1}^{l} C_{\alpha\beta}^{i} H_i = \sum_{i=1}^{l} C_{\alpha_j - \alpha}^{i} H_i \quad \text{si} \quad \alpha + \beta = 0 \tag{9}$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} \qquad \text{si} \quad \alpha + \beta \in \mathbf{V_R} \tag{10}$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = 0 \qquad \text{si} \quad \alpha + \beta \neq 0 \quad \text{y} \quad \alpha + \beta \notin \mathbf{V_R} \tag{11}$$

donde $N_{\alpha,\beta}$ es un coeficiente de proporcionalidad cuyo valor vendrá dado mas adelante. Las componentes del tensor métrico vienen definidos como

$$g_{AB} = \sum_{T,P} C_{AT}^{P} C_{BT}^{T}.$$

Ahora obtengamos las componentes g_{ij} de dicho tensor

$$g_{ij} = \sum_{T,P} C_{iT}^{P} C_{jP}^{T} = \sum_{k=1}^{l} \sum_{T} C_{iT}^{k} C_{jk}^{T} + \sum_{\alpha} \sum_{T} C_{iT}^{\alpha} C_{j\alpha}^{T}$$

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{l} \sum_{T} C_{iT}^{k} C_{jk}^{T} + \sum_{\alpha} \sum_{k=1}^{l} C_{ik}^{\alpha} C_{j\alpha}^{k} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} C_{i\beta}^{\alpha} C_{j\alpha}^{\beta}. \tag{12}$$

Usando (6), (7), y (8) en 12 obtenemos

$$g_{ij} = \sum_{\alpha} \alpha_i \alpha_j$$

escribiendo esta última expresión en forma matricial

$$g = \sum_{\alpha} \alpha^T \alpha \tag{13}$$

donde la suma se extiende sobre todas las raíces no nulas.

En base a las componentes g_{ij} del tensor métrico, definimos el producto escalar en el espacio de los vectores raíces l-dimensional como

$$(\alpha \cdot \beta) \equiv \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} g^{ij} \alpha_i \beta_j .$$

Las componentes g^{ij} son definidas en base a las componentes g_{ij} del tensor métrico, de modo tal que

$$\sum_{k=1}^{l} g^{ik} g_{ki} = \delta^i_j .$$

Las componentes contravariantes de los vectores raíces se definen como

$$\alpha^i \equiv \sum_{j=1}^{l} g^{ij} \alpha_j .$$

De este modo el producto escalar se escribe

$$(\alpha \cdot \beta) \equiv \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \beta^i \equiv \sum_{i=1}^{l} \alpha^i \beta_i = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} g_{ij} \alpha^i \beta^j$$

La longitud de una raíz α se define como $(\alpha.\alpha)^{1/2}$.

A partir de la ecuación (13) se deduce que la matriz $\{g_{ij}\}$ es una matriz simétrica real definida positiva, en consecuencia dicha matriz tendrá todos sus valores propios positivos. Una matriz cuadrada real A se llama definida positiva, si

$\bar{x}^T A \bar{x} \geq 0$ para todo $\bar{x} \in R^n$ y $\bar{x}^T A \bar{x} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 0$.

A continuación mencionamos las propiedades generales de las raíces

(a1) Si α es una raíz no nula, entonces $k\alpha$ es una raíz si y solo si $k = \pm 1$.
Esto quiere decir que las raíces no nulas siempre aparecen en pares, se deduce entonces que n-l es un número entero par.

(a2) Si α y β son dos raíces no nulas, existen dos números enteros no negativos p y q tal que

$$\beta - p\alpha, \beta - (p-1)\alpha, ..., \beta, \beta + \alpha, ..., \beta + q\alpha \tag{14}$$

son las únicas raíces del tipo $\beta + k\alpha$.

El conjunto de raíces (14) es llamado la α cadena que contiene a β.

(a3) Si α y β son dos raíces no nulas, entonces

$$\frac{2(\alpha \cdot \beta)}{(\alpha \cdot \alpha)} = p - q \tag{15}$$

y

$$\beta - (p-q)\alpha \tag{16}$$

es una raíz.

Si en (a2) y (a3) intercambiamos la raíz α por β y β por α, obtenemos relaciones similares pero con otros números enteros positivos p' y q'; así por ejemplo si en la ecuación (15) intercambiamos α con β tenemos

$$\frac{2(\alpha \cdot \beta)}{(\beta \cdot \beta)} = p' - q'. \tag{17}$$

Definimos el ángulo φ entre dos raíces no nulas α y β como

$$\cos\varphi \equiv \frac{(\alpha\cdot\beta)}{[(\alpha\cdot\alpha)(\beta\cdot\beta)]^{1/2}}. \tag{18}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación (18) y luego reemplazando (15) y (17) en dicha ecuación tenemos

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{4}(p-q)(p'-q'). \tag{19}$$

A partir de la ecuación (19), se ve que el ángulo φ puede asumir solo los siguientes valores

$$\varphi = 0°\ \ (180°) \quad 30°\ \ (150°) \quad 45°\ \ (135°) \quad 60°\ \ (120°) \quad 90°. \tag{20}$$

A continuación se muestra un resumen de las relaciones de conmutación entre los elementos de la base de Cartan-Weyl $\{H_i, E_\alpha\}$

$$[H_i, H_j] = 0 \tag{21}$$

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
&[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \sum_{i=1}^{l} \alpha^i H_i && \text{si} \quad \alpha+\beta = 0 \\
&[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} && \text{si} \quad \alpha+\beta \in V_R \\
&[E_\alpha, E_\beta] = 0 && \text{si} \quad \alpha+\beta \in \mathbf{V_R} \ \text{y} \ \alpha+\beta \notin V_R
\end{aligned} \tag{23}$$

el coeficiente $N_{\alpha\beta}$ viene dado por

$$N_{\alpha\beta} = \pm[\frac{1}{2}(p+1)q(\alpha\cdot\alpha)]^{1/2} \tag{24}$$

donde p y q son dos números enteros positivos que caracterizan la α cadena que contiene a β. Además dicho coeficiente satisface [2]

$$N_{\alpha\beta} = -N_{\beta\alpha} = -N_{-\alpha,-\beta} = N_{-\alpha,\alpha+\beta} = N_{\beta,-\alpha-\beta} \tag{25}$$

Raíces simples

Una raíz no nula $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l)$ se llama positiva si su primera componente no nula α_i es un número positivo.

Por ejemplo, considerando las siguientes raíces no nulas

(1,0) (1,1) (1,-1) (0,1) (0,-1) (-1,0) (-1,1) (-1,-1)

las primeras cuatro raíces de este conjunto son raíce positivas.

Una raíz no nula se llama simple si dicha raíz es positiva y no puede ser escrita como la suma de dos raíces positivas.

Del ejemplo anterior tenemos

(1,0) = (1,-1) + (0,1) y (1,1) = (1,0) + (0,1)

por lo tanto (1,0) y (1,1) no son raíces simples. Las raíces (0,1) y (1,-1) si son raíces simples.

Un álgebra de Lie semisimple de rango l posee l raíces simples, es decir el número de raíces simples es igual al rango del álgebra.

A continuación mencionamos las propiedades más importantes de las raíces simples

(c1) Si α y β son dos raíces simples, $\alpha - \beta$ no es una raíz y $(\alpha.\beta) \leq 0$.

(c2) Cualquier raíz positiva puede ser escrita como una combinación lineal de raíces simples con coeficientes enteros positivos

$$\alpha_{positivo} = \sum k_i \alpha^{(i)}_{simple} \qquad (k_i \geq 0 \quad \text{entero}) \tag{26}$$

(c3) Si α y β son dos raíces simples, el ángulo entre ellos $\varphi_{\alpha\beta}$ puede tomar los valores de 90°, 120°, 135° o 150°.

Si $(\alpha.\alpha) \leq (\beta.\beta)$, entonces

$$\frac{(\beta\cdot\beta)}{(\alpha\cdot\alpha)}=\begin{cases}1 & \text{para } \varphi_{\alpha\beta}=120^\circ\\ 2 & \text{para } \varphi_{\alpha\beta}=135^\circ\\ 3 & \text{para } \varphi_{\alpha\beta}=150^\circ\\ \text{indeterminado} & \text{para } \varphi_{\alpha\beta}=90^\circ\end{cases} \tag{27}$$

(c4) Si α es una raíz positiva no simple, es posible encontrar una raíz simple $\alpha^{(k)}$ tal que α-$\alpha^{(k)}$ es otra raíz positiva.

Las propiedades de las raíces simples, junto con las propiedades generales de las raíces, permite determinar las demas raíces a partir de las raíces simples.

Con el fin de obtener todas las raíces a partir de las raíces simples, lo primero que haremos será dar el concepto de nivel.

Si α es una raíz positiva, de acuerdo a la ecuación (26), existe l números enteros positivos k_i (i=1,2,...,l) que permiten expresar dicha raíz como una combinación lineal de raíces simples. Si

$$\sum_{i=1}^{l} k_i = N, \tag{28}$$

decimos que la raíz positiva α pertenece al Nésimo nivel. En particular, todas las raíces simples pertenecen al primer nivel (N=1). De la propiedad (c4) vemos que una raíz positiva del Nésimo nivel, puede ser obtenida por la suma de una raíz simple con alguna raíz positiva del (N-1)ésimo nivel. En particular si un nivel esta vació, es decir si dicho nivel no contiene ninguna raíz positiva, todos los niveles sucesivos también estarán vacios.

Para hallar todas las raíces, primero debemos hallar todas las raíces positivas, una vez obtenidas todas estas raíces (raíces positivas), las demas raíces se obtendrán usando la propiedad (a1).

Ahora veremos los pasos a seguir para obtener todas las raíces positivas.

Asumimos que conocemos todas las raíces positivas hasta un cierto nivel,

$\forall z' \in N, \quad \alpha(z) \subset \alpha(z'),$

digamos hasta el Nésimo nivel.

Si $\alpha = \sum k_i \alpha^{(i)}$ es una raíz positiva que pertenece a este nivel (Násimo), consideramos la $\alpha^{(k)}$ cadena ($\alpha^{(k)}$ es una raíz simple) que contiene a α.

De acuerdo a la ecuación (15) tenemos,

$$p - q = \frac{2\alpha \cdot \alpha^{(k)}}{\alpha^{(k)} \cdot \alpha^{(k)}} = \sum_{i=1}^{l} k_i \frac{2\alpha^{(i)} \cdot \alpha^{(k)}}{\alpha^{(k)} \cdot \alpha^{(k)}} \quad (\alpha^{(i)}, \alpha^{(k)} \text{ raíces simples}) \tag{29}$$

Como conocemos todas las raíces positivas hasta el nivel Nésimo, podemos verificar si α-m$\alpha^{(k)}$ es o no una raíz para algún número entero positivo m, de esta manera podemos conocer el número p relativo a la $\alpha^{(k)}$ cadena que contiene a α, luego usando la ecuación (29) determinamos el valor de q, y si $q \geq 1$, entonces $\alpha+\alpha^{(k)}$ es una raíz del (N+1)ésimo nivel. De esta manera podemos obtener todas las raíces positivas a partir del primer nivel, vale decir a partir de las raíces simples por medio de un procedimiento recurrente.

Diagrama de Dynkin

Los diagramas de Dynkin muestran de manera abreviada todas las raíces simples correspondientes a cada álgebra de Lie semisimple. En un diagrama de Dynkin cada raíz simple es representada por un pequeño círculo. Pares de raíces simples (círculos) que estan conectados por una, dos, o tres lineas, corresponden a ángulos de 120°, 135°, o 150° entre dichas raíces. Pares de círculos que no estan conectados, corresponden a pares de raíces simples cuyo ángulo entre ellos es de 90°. Los círculos negros corresponden a las raíces simples con menor longitud respecto de las longitudes de las demás raíces simples, mientras que los círculos blancos corresponden a las raíces simples con mayor longitud respecto de las longitudes de las demas raíces simples. Si todos los círculos son de color blanco, quiere decir que todas las raíces simples tienen la misma longitud. Como ejemplo a continuación mostramos el diagrama de Dynkin del álgebra su (l+1) (l=1,2,3,...)

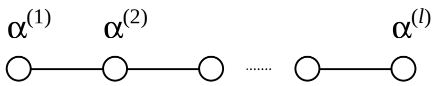

Diagrama de Dynkin del álgebra **su**(l+1)

Ejemplos

Álgebra de Lie semisimple de rango 1

Un álgebra de Lie de rango uno poseerá solo una raíz simple, denominemos $\alpha^{(1)}$ a dicha raíz. Para este caso el primer nivel N=1 contiene a la raíz $\alpha^{(1)}$. De acuerdo con al ecuación (26) el segundo nivel N=2, puede contener solo a la raíz $2\alpha^{(1)}$, pero de acuerdo con la propiedad (a1) $-\alpha^{(1)}$ y $\alpha^{(1)}$ son las únicas raíces no nulas del tipo $k\alpha^{(1)}$, por lo tanto $2\alpha^{(1)}$ no es una raíz, es decir el segundo nivel esta vació, entonces tenemos solo una raíz positiva $\alpha^{(1)}$, en consecuencia todas las raíces no nulas vienen a ser $\pm\alpha^{(1)}$. Puesto que tenemos 2 raíces no nulas y el rango del álgebra es uno, la dimensión del álgebra es para este caso

$$n = 2 + 1 = 3.$$

Si escogemos $\alpha^{(1)}=1$, usando (13) obtenemos $g_{11}=2$, a partir de esta última ecuación tenemos $g^{11}=1/2$.

Usamos (22) y (23) obtenemos

$$\begin{aligned} &[H_1, E_1] = E_1 \\ &[H_1, E_{-1}] = -E_{-1} \\ &[E_1, E_{-1}] = \frac{1}{2} H_1. \end{aligned} \tag{30}$$

Sea $\{S_1,S_2,S_3\}$, una base de esta álgebra de Lie de dimensión 3, cuya relación con la base de Cartan-Weyl $\{H_1,E_1,E_{-1}\}$ viene dada por

$$\begin{aligned} &S_1 = E_1 + E_{-1} \\ &S_2 = i(E_{-1} - E_1) \\ &S_3 = H_1 \end{aligned} \tag{31}$$

Empleando (30) y (31), obtenemos

$$[S_i, S_j] = \sum_{k=1}^{3} i\varepsilon_{ijk} S_k$$

Vemos entonces que esta álgebra de dimensión 3 de rango uno, es el álgebra su(2).

Álgebras de Lie semisimples de rango 2

Existen varios ejemplos de álgebras de Lie semisimples de rango dos, dicha álgebras poseerán 2 raíces simples, llamando $\alpha^{(1)}$ y $\alpha^{(2)}$ a dichas raíces. En esta parte discutiremos en detalle el caso cuando el ángulo entre las dos raíces simples es de $\varphi_{\alpha(1)\ \alpha(2)} = 120°$. De acuerdo a (c3) tenemos $(\alpha^{(1)}.\alpha^{(1)})/(\alpha^{(2)}.\alpha^{(2)})=1$. Tomando $\alpha^{(2)}.\alpha^{(2)}=1$ tendremos que $\alpha^{(1)}.\alpha^{(1)}=1$y $\alpha^{(1)}.\alpha^{(2)}=-1/2$.

El primer nivel N=1 contiene las raíces $\alpha^{(1)}$ y $\alpha^{(2)}$. El segundo nivel N=2 puede contener las raíces $2\alpha^{(1)}$, $2\alpha^{(2)}$ o $\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}$. Sin embargo, debido a la propiedad (a1) $2\alpha^{(1)}$ y $2\alpha^{(2)}$ no pueden ser raíces. Ahora verificaremos si $\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}$ es o no una raíz, para ello consideremos la $\alpha^{(2)}$ cadena que contiene a $\alpha^{(1)}$. De acuerdo a (c1), $\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}$ no es una raíz, por lo tanto p=0. De la ecuación (29) tenemos

$$-q = \frac{2\alpha^{(1)} \cdot \alpha^{(2)}}{\alpha^{(2)} \cdot \alpha^{(2)}} = -1$$

por lo tanto q=1 y entonces $\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}$ es una raíz positiva del segundo nivel. Para el tercer nivel, sabemos que todas las raíces de este nivel son obtenidas mediante la suma de una de las raíces del segundo nivel (cualquiera de ellas) con alguna raíz simple.

Consideremos ahora la $\alpha^{(2)}$ cadena que contiene a $\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}$ (raíz del segundo nivel). Dado que $(\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)})-\alpha^{(2)}=\alpha^{(1)}$ es una raíz pero $(\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)})-2\alpha^{(2)}=\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}$ no es una raíz, tenemos que p=1. De la ecuación (29) tenemos

$$1-q = \frac{2\alpha^{(2)} \cdot (\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)})}{\alpha^{(2)} \cdot \alpha^{(2)}} = \frac{2[\alpha^{(1)} \cdot \alpha^{(2)} + \alpha^{(2)} \cdot \alpha^{(2)}]}{\alpha^{(2)} \cdot \alpha^{(2)}} = -1 + 2 = 1$$

por lo tanto q=0 y entonces $(\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)})+\alpha^{(2)}=\alpha^{(1)}+2\alpha^{(2)}$ no es una raíz pues q=0, si q hubiese sido igual a 1 ahí si $\alpha^{(1)}+2\alpha^{(2)}$ hubiera sido una raíz positiva del tercer nivel.

Procediendo de manera análoga al caso anterior pero ahora considerando la $\alpha^{(1)}$ cadena que contiene a $\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}$, se demuestra que $2\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}$ no es una raíz. Por lo tanto el tercer nivel N=3 esta vacío y entonces tenemos solo las tres raíces positivas,

$$\alpha^{(1)},\ \alpha^{(2)},\ \alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}.$$

En consecuencia todas las raíces no nulas vienen a ser,

$$\pm\alpha^{(1)},\ \pm\alpha^{(2)},\ \text{y}\ \pm(\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}).$$

Debido a que tenemos 6 raíces no nulas y el rango del álgebra es dos, la dimensión del álgebra es en este caso

$$n = 6 + 2 = 8.$$

Si elegimos $\alpha^{(1)}=\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2}\right)$ y $\alpha^{(2)}=\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{1}{2}\right)$, obtenemos las demas raíces no nulas $-\alpha^{(1)}=\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{1}{2}\right)$, $\alpha^{(2)}=\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2}\right)$, $\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ y $-(\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)})=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$, luego usando (13) obtenemos $g_{ij}=\delta_{ij}$, a partir de esta última ecuación tenemos $g^{ij}=\delta_{ij}$.

Para este caso $\{H_1,H_2,E_{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2}\right)},E_{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{1}{2}\right)},E_{\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{1}{2}\right)},E_{\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2}\right)},E_{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)},$ $E_{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)}\}$, viene a ser la base de Cartan-Weyl, usando (22), (23), (24) y (25), obtenemos las relaciones de conmutación entre los elementos de esta base

$$[H_1,E_{\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{3}},\pm\frac{1}{2}\right)}]=\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}E_{\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{3}},\pm\frac{1}{2}\right)}$$

$$[H_1,E_{\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{3}},\mp\frac{1}{2}\right)}]=\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}E_{\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{3}},\mp\frac{1}{2}\right)}$$

$$[H_1,E_{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)}]=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}E_{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)}$$

$$[H_2, E_{\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{3}},\pm\frac{1}{2}\right)}] = \pm\frac{1}{2} E_{\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{3}},\pm\frac{1}{2}\right)}$$

$$[H_2, E_{\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{3}},\mp\frac{1}{2}\right)}] = \mp\frac{1}{2} E_{\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{3}},\mp\frac{1}{2}\right)}$$

$$[H_2, E_{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)}] = 0$$

$$[E_{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2}\right)}, E_{\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{1}{2}\right)}] = \frac{1}{2\sqrt{3}} H_1 + \frac{1}{2} H_2$$

$$[E_{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{1}{2}\right)}, E_{\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2}\right)}] = \frac{1}{2\sqrt{3}} H_1 - \frac{1}{2} H_2$$

$$[E_{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)}, E_{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)}] = \frac{1}{\sqrt{3}} H_1$$

$$[E_{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2}\right)}, E_{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{1}{2}\right)}] = \frac{1}{\sqrt{6}} E_{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)}$$

$$[E_{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2}\right)}, E_{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)}] = -\frac{1}{\sqrt{6}} E_{\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2}\right)}$$

$$[E_{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{1}{2}\right)}, E_{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)}] = \frac{1}{\sqrt{6}} E_{\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{1}{2}\right)}$$

Esta álgebra de dimensión 8 de rango dos, es el álgebra su(3) [2].

Conclusiones

En este trabajo damos una regla práctica para obtener todas las raíces de una álgebra de Lie semisimple a partir de las raíces simples. Una vez determinadas todas las raíces (como se vió en los ejemplos), se puede hallar las relaciones de conmutación entre los elementos de la base de Cartan-Weyl.

Un álgebra de Lie posee varias bases, vimos que para un álgebra de Lie semisimple existe una base especial denominada base de Cartan Weyl, donde las relaciones de conmutación entre los elementos de esta base adoptan una forma que es muy usada en Física.

BIBLIOGRAFÍA

[1] ***Greiner, Walter, Muller, Berndt***, *Quantum Mechanics: Symmetries, Berlin, Springer-Verg 1994.*

[2] ***L. Fonda, G. C. Ghirardi***, *Symmetry Principles in Quantum Physics, Textbook Binding, 1986.*